Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS COMPTABILITÉ ET GESTION • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1 en Analyses de biologie médicale et Biotechnologies ; 1,5 en Europlastics et composites ; 2 en Bio analyses et contrôles et Bioqualité**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://formationbtscg.fr/assets/annales/bts-cg/E2 - Mathématiques/2022/BTS CG - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical

Dans un pays de 60 millions d'habitants, l'exercice étudie l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical à partir de données annuelles depuis 2013. Deux modèles sont utilisés : un ajustement exponentiel et une fonction définie à partir d'une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Compléter le tableau de l'annexe à rendre avec la copie en calculant les valeurs de y = ln(N - 30), arrondies au millième.

On applique à chaque valeur du tableau la transformation $y = \ln(N - 30)$, où N est exprimé en milliers, puis on arrondit au millième. Les rangs associés aux années 2013 à 2021 vont de 0 à 8.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
y	3,268	3,336	3,418	3,497	3,578	3,656	3,738	3,818	3,898

✓ RÉPONSE À RETENIR

Valeurs de y, de 2013 à 2021 : 3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.

Question 2.a. À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $M_i(k_i ; y_i)$, sous la forme y = ak + b. Arrondir a et b au centième.

La régression linéaire des neuf points $(k_i ; y_i)$, obtenus avec les valeurs du tableau arrondies au millième, donne une pente proche de $0,0794$ et une ordonnée à l'origine proche de $3,260$. L'énoncé demande d'arrondir chacun de ces coefficients au centième. On obtient donc l'équation suivante pour la droite d'ajustement :

$$y = 0,08k + 3,26.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = 0,08k + 3,26.$

Question 2.b. En utilisant l'équation de la droite d'ajustement, déduire le modèle $N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$ pour le nombre de personnes équipées, exprimé en milliers, en fonction du rang k.

Le changement de variable donne $y = \ln(N - 30)$. En remplaçant y par l'expression de la droite, puis en exponentiant, on obtient $N - 30 = e^{3,26}e^{0,08k}$. Comme $e^{3,26} \approx 26,05$, le modèle correspondant, avec N en milliers de personnes, est bien :

$$N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$, en milliers de personnes.

Question 3.a. **En supposant que le modèle proposé reste valide, estimer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.**

L'année 2026 correspond au rang $k = 2026 - 2013 = 13$. On évalue alors le modèle de la partie A :

$$N(13) = 30 + 26,05e^{0,08\times 13} \approx 103,70.$$

La valeur est exprimée en milliers de personnes. Arrondie au millier près, elle correspond donc à 104 milliers de personnes équipées.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

En 2026, environ 104 000 personnes seront équipées.

Question 3.b. **Si le nombre d'habitants du pays reste stable à long terme, déterminer si le modèle étudié demeure valide à long terme et justifier la réponse.**

Quand k tend vers $+\infty$, le terme $e^{0,08k}$ tend vers $+\infty$. Le modèle prévoit donc que $N(k)$ augmente sans limite. Or le pays compte 60 millions d'habitants et sa population est supposée rester stable : le nombre de personnes équipées ne peut pas dépasser cette population. Le modèle finit ainsi par fournir une prévision impossible.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Non : le modèle tend vers l'infini, alors que la population est limitée à 60 millions.

Partie B

Question 1.a. **Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,05y = 0.**

L'équation homogène $y' + 0,05y = 0$ s'écrit $y' = -0,05y$. Pour une équation différentielle de la forme $y' = ay$, les solutions sont de la forme Ce^{ax}, où C est une constante réelle. Ici, $a = -0,05$, donc les solutions sur $[0, +\infty[$ sont :

$$y(x) = Ce^{-0,05x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$y(x) = Ce^{-0,05x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. **Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

Pour chercher une solution constante $y = c$, on pose $y' = 0$ dans l'équation $y' + 0,05y = 0,05$. Il vient $0,05c = 0,05$, donc $c = 1$. La fonction constante égale à 1 vérifie bien l'équation différentielle (E) et constitue une solution particulière.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution constante de (E) est $y(x) = 1$.

Question 1.c. **Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

Les solutions de l'équation homogène associée sont $Ce^{-0,05x}$, et la fonction constante égale à 1 est une solution particulière de (E). La solution générale de l'équation complète s'obtient en ajoutant cette solution particulière aux solutions de l'équation homogène. Ainsi, sur $[0, +\infty[$:

$$y(x) = 1 + Ce^{-0,05x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(x) = 1 + Ce^{-0,05x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.d. **Sachant que g(0) = 8, déduire une expression de la fonction g sur [0, +∞[.**

La solution générale est $g(x) = 1 + Ce^{-0,05x}$. On utilise la condition initiale $g(0) = 8$: comme $e^0 = 1$, on a $1 + C = 8$, donc $C = 7$. La fonction cherchée, définie sur $[0, +\infty[$, est par conséquent :

$$g(x) = 1 + 7e^{-0,05x}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(x) = 1 + 7e^{-0,05x}$.

Question 2. **À partir du modèle f(t) = 450/(1 + 7e$^{-0,05t}$), déterminer au millier près combien de personnes seront équipées de l'implant en 2026. Le temps t est exprimé en années depuis 2013 et f(t) en milliers de personnes.**

Le temps écoulé entre 2013 et 2026 est $t = 2026 - 2013 = 13$ ans. En remplaçant t dans le modèle, exprimé en milliers de personnes, on obtient :

$$f(13) = \frac{450}{1 + 7e^{-0,05 \times 13}} \approx 96,68.$$

L'arrondi au millier près donne donc environ 97 milliers de personnes équipées.

✓ RÉPONSE À RETENIR

En 2026, environ 97 000 personnes seront équipées.

Question 3. Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Lorsque t tend vers $+\infty$, on a $e^{-0{,}05t} \to 0$. Ainsi, le dénominateur $1 + 7e^{-0{,}05t}$ tend vers 1, et le quotient tend vers 450. Comme $f(t)$ représente un nombre de personnes en milliers, le modèle prévoit une stabilisation à 450 000 personnes équipées à long terme.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 450$: le modèle prévoit 450 000 personnes équipées.

Question 4. À partir de l'expression de f'(t) fournie, déduire le sens de variation de f sur [0, +∞[et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

L'expression donnée est $f'(t) = \frac{315e^{-0{,}05t}}{2(1+7e^{-0{,}05t})^2}$. Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive, tout comme le dénominateur. Ainsi, $f'(t) > 0$ sur $[0, +\infty[$, donc f est strictement croissante. Selon ce modèle, le nombre de personnes équipées augmente avec le temps.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement croissante : le nombre de personnes équipées augmente.

Question 5. Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers. Expliquer la méthode employée.

On résout $f(t) > 120$. Le dénominateur étant positif, cette inégalité équivaut à $450 > 120(1 + 7e^{-0{,}05t})$, puis à $e^{-0{,}05t} < 11/28$. En prenant les logarithmes, on obtient $t > \frac{\ln(28/11)}{0{,}05} \approx 18{,}69$. Pour les années entières, le premier rang satisfaisant cette condition est $t = 19$, soit l'année $2013 + 19 = 2032$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le nombre dépassera 120 000 personnes à partir de 2032.

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller

Dans une usine, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et une file de bouteilles vides. L'exercice porte sur les défauts d'approvisionnement, les pannes observées sur 200 jours et le contrôle statistique du volume d'eau contenu dans les bouteilles.

Partie A

Question 1 à 4. Pour chacune des quatre phrases du tableau de gauche, associer l'information correspondante du tableau de droite : probabilité que la file ne se vide pas, événement où seule la file est vide, probabilité que la file et le réservoir soient tous deux vides au moins une fois, et probabilité d'un défaut d'approvisionnement. Inscrire sur la copie le numéro de chaque phrase et la lettre associée, sans justification.

Les événements sont A : file vide et B : réservoir vide. Le défaut correspond à $A \cup B$. Avec l'indépendance, $P(A \cap B) = 0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}0006$ et $P(A \cup B) = 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}0006 = 0{,}0494$.

Phrase	Information associée
1	E : 0,97
2	C : $A \cap \bar{B}$
3	F : 0,0006
4	D : 0,0494

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

1-E ; 2-C ; 3-F ; 4-D.

Partie B

Question 1. La probabilité que la machine tombe en panne un jour donné est 0,025 et les jours de panne sont indépendants. Donner, sans justification, la loi de probabilité de X, le nombre de jours de panne sur une période de 200 jours, et préciser ses paramètres.

Chaque jour est une épreuve de Bernoulli, avec une probabilité de panne de 0,025. Les 200 épreuves sont indépendantes et X compte le nombre de jours de panne. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}025$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

X suit la loi binomiale B(200 ; 0,025).

Question 2.a. **La loi de X est approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Justifier que λ = 5.**

L'approximation d'une loi binomiale B(n, p) par une loi de Poisson utilise le paramètre λ = np. Ici, λ = 200 × 0,025 = 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> λ = 5.

Question 2.b. **Pour une variable aléatoire Y suivant la loi de Poisson de paramètre λ = 5, donner la valeur de P(Y ≤ 10), arrondie à 10^{-3}.**

On additionne les probabilités de Poisson pour les entiers de 0 à 10 :

$P(Y \leq 10) = \Sigma_{k=0}^{10} e^{-5} \times 5^k / k! \approx 0{,}9863047$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 10) \approx 0{,}986$.

Question 2.c. **La représentation graphique suggère que P(Y = 15) = 0. À l'aide de la formule donnée pour la loi de Poisson, déterminer si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.**

Pour une loi de Poisson de paramètre 5, $P(Y = 15) = e^{-5} \times 5^{15} / 15! \approx 0{,}0001572$. Cette valeur est strictement positive, même si elle est trop petite pour être visible à l'échelle du graphique.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La conjecture est fausse : P(Y = 15) ≈ 0,0001572, donc cette probabilité n'est pas nulle.

Partie C

Question 1. **À l'aide de la calculatrice et des résultats de l'échantillon de 100 bouteilles, déterminer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type σ. Arrondir l'écart type à 10^{-2}.**

Les effectifs totalisent 100 bouteilles. La moyenne pondérée se calcule avec les volumes et leurs effectifs :

$\bar{x} = (73 \times 17 + 74 \times 20 + 75 \times 43 + 76 \times 13 + 77 \times 7) / 100 = 74{,}73$ cL.

L'écart type de la série, calculé à partir des écarts à cette moyenne, vaut environ 1,103 cL, soit 1,10 cL au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\bar{x} = 74{,}73$ cL et $\sigma \approx 1{,}10$ cL.

Question 2.a. **Sous l'hypothèse H_0 : m = 75, la variable Z suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. Déterminer un réel h tel que P(75 - h ≤ Z ≤ 75 + h) ≈ 0,95, à 10^{-2} près.**

Pour une loi normale, l'intervalle central de probabilité 0,95 est délimité par environ 1,96 écarts types de part et d'autre de l'espérance. On obtient h = 1,96 × 0,11 = 0,2156 cL, soit 0,22 cL à 10^{-2} près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> h ≈ 0,22 cL.

Question 2.b. **Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de confiance de 95 %.**

Au seuil bilatéral de 5 %, l'intervalle de décision est centré sur 75 cL, avec h ≈ 0,22 cL.

- Si la moyenne observée appartient à [74,78 ; 75,22], on ne rejette pas H_0.
- Si elle est hors de cet intervalle, on rejette H_0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si $\bar{x} \in [74{,}78 ; 75{,}22]$; sinon, rejeter H_0.

Question 2.c. **À partir des résultats de l'échantillon fourni, déterminer si l'hypothèse H_0 : m = 75 peut être acceptée.**

La moyenne de l'échantillon vaut 74,73 cL. Elle est inférieure à la borne basse 74,78 cL de l'intervalle d'acceptation. Elle n'appartient donc pas à cet intervalle : les résultats conduisent à rejeter H_0 au seuil de 5 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : on rejette H_0, car $74{,}73 \notin [74{,}78 ; 75{,}22]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, d'une durée de 2 heures et de coefficient variable selon la spécialité. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, étudient la modélisation du nombre de personnes équipées d'un implant et le fonctionnement d'une machine à embouteiller. Les compétences évaluées couvrent ajustements, équations différentielles, probabilités et tests statistiques.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut np ; l'approximation de Poisson utilise $\lambda = np$.
- Pour Y suivant une loi de Poisson de paramètre λ, $P(Y = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ et reste positive pour tout entier k.
- La solution générale de $y' + ay = b$ est la somme d'une solution constante b/a et d'une solution de l'équation homogène.
- Un test bilatéral à 95 % compare la moyenne observée à l'intervalle central de probabilité 0,95 sous H_0.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : les nombres de personnes équipées sont exprimés en milliers et t compte les années depuis 2013.
- Appliquer le changement de variable avant la régression et respecter les arrondis demandés.
- Distinguer l'union des événements A et B de leur intersection ; utiliser leur indépendance pour calculer les probabilités conjointes.
- Pour le test, comparer la moyenne observée à l'intervalle de décision et formuler une conclusion dans le contexte.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer le paramètre de Poisson utilisé pour approcher le nombre de pannes ?

Le nombre de pannes suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,025. Pour l'approximation de Poisson, le paramètre est $\lambda = np$, soit $\lambda = 5$.

Q : Pourquoi la probabilité d'observer exactement 15 pannes n'est-elle pas nulle ?

La formule donne $P(Y = 15) = e^{-5} \times 5^{15}/15!$. Chaque facteur est strictement positif, donc cette probabilité est positive, même si sa valeur est faible et difficile à distinguer sur le graphique.

Q : Comment répartir le temps et les calculs pendant cette épreuve de deux heures ?

Les exercices valent chacun 10 points, et les parties de l'exercice 2 sont indépendantes. Répartissez le temps entre les deux exercices, utilisez la calculatrice autorisée et présentez les méthodes, unités et arrondis demandés.

Q : Quel critère permet de conclure au test bilatéral de réglage de la machine ?

Sous H_0, on détermine l'intervalle central contenant 95 % des moyennes d'échantillons. Si la moyenne observée est dans cet intervalle, on ne rejette pas H_0 ; sinon, on la rejette au seuil de 5 %.

Sujet officiel associé (PDF) : https://formationbtscg.fr/assets/annales/bts-cg/E2 - Mathématiques/2022/BTS CG - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Comptabilité et Gestion : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.