Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS COMPTABILITÉ ET GESTION • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation du freinage d'un chariot et étude de sa vitesse** (12 questions) — Page 3
2. **Transformées de Laplace d'un signal d'entrée et d'un signal de sortie** (9 questions) — Page 7
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — Page 11

Sujet officiel (PDF) : https://formationbtscg.fr/assets/annales/bts-cg/E2 - Mathématiques/2022/BTS CG - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation du freinage d'un chariot et étude de sa vitesse

Un chariot de fête foraine est lancé à 20 m/s puis ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une fonction étudiée au moyen d'une équation différentielle, de ses variations, d'une intégrale donnant une distance et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,8y = 0.**

La formule de l'équation homogène s'applique avec $a = 0{,}8$. La constante multiplicative est arbitraire, donc les solutions sur $[0 ; +\infty[$ sont $y(t) = Ce^{-0{,}8t}$, où C est un réel. En effet, la dérivée de cette expression vaut $-0{,}8Ce^{-0{,}8t}$, et la somme avec $0{,}8y(t)$ est nulle.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> **Les solutions sont $y(t) = Ce^{-0{,}8t}$, pour tout $C \in \mathbb{R}$.**

Question 1.b. **Pour g(t) = 5, vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. En la substituant dans le membre de gauche de l'équation, on obtient $g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$. Cette égalité étant vérifiée pour tout t, $g(t) = 5$ est bien une solution de (E).

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> **$g(t) = 5$ est une solution de (E), car $0 + 0{,}8 \times 5 = 4$.**

Question 1.c. **Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E), et les solutions de l'équation homogène associée sont $Ce^{-0{,}8t}$. Toute solution de l'équation complète s'obtient en ajoutant cette solution particulière à une solution homogène. On obtient ainsi l'ensemble des solutions sur l'intervalle donné.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> **$y(t) = Ce^{-0{,}8t} + 5$, avec $C \in \mathbb{R}$.**

Question 2. **Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

La solution générale est $f(t) = Ce^{-0{,}8t} + 5$. À l'instant initial, $e^0 = 1$, donc $f(0) = C + 5$. La condition $f(0) = 20$ donne $C = 20 - 5 = 15$. En remplaçant la constante par cette valeur, on obtient la fonction vitesse demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Quand t tend vers +∞, l'exposant $-0,8t$ tend vers −∞. Ainsi, $e^{-0,8t}$ tend vers zéro. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend donc vers zéro, tandis que le terme constant demeure égal à cinq. La limite de $f(t)$ vaut alors cinq.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La limite de *f(t)* lorsque *t* → +∞ est *5*.

Question 1.b. En déduire que la courbe représentative C de f admet une asymptote et en donner une équation.

Une fonction qui tend vers une limite finie L en +∞ possède une asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, la limite de $f(t)$ est égale à 5. La courbe C se rapproche donc de la droite horizontale d'équation $y = 5$ lorsque t augmente indéfiniment.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe *C* admet l'asymptote horizontale d'équation *y = 5*.

Question 2. Sachant que f'(t) = -12e$^{-0,8t}$ sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante. Elle commence à $f(0) = 20$ et tend vers 5 en +∞.

t	**0**	**+∞**
f'(t)	−	
f(t)	20	↘ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

***f* est strictement décroissante de *20* vers *5* sur *[0 ; +∞[*.**

Question 3. **Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?**

Pour que le chariot s'arrête, sa vitesse doit atteindre zéro. Or, pour tout instant fini $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Par conséquent, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse reste positive et tend vers 5 m/s sans atteindre cette limite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **Non : le chariot ne s'arrête pas, car sa vitesse tend vers *5* m/s.**

Question 4.a. **Pour F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Le produit des coefficients vaut 15, donc $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. Ainsi, F est bien une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> ***F'(t) = f(t)* : *F* est une primitive de *f*.**

Question 4.b. **En utilisant l'intégrale de f entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance vaut $d = F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive donnée, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m. Numériquement, cette distance vaut environ $15,3251$ m. Arrondie au centimètre, elle est égale à $15,33$ m.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> ***d = 23,75 − 18,75e$^{-0,8}$ m ≈ 15,33 m*, au centimètre près.**

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir parmi les trois propositions la seule expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Recopier la réponse choisie sans justification.**

La troisième proposition associe au terme quadratique affiché par le logiciel un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t)$ qui tend vers zéro lorsque t tend vers zéro. C'est la forme correcte du développement limité à l'ordre 2.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> ***f(t) = 20 − 12t + 4,8t² + t²ε(t)*, avec *ε(t) → 0* lorsque *t → 0*.**

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse zéro est $y = f(0) + f'(0)t$. La condition initiale donne $f(0) = 20$, et la dérivée admise donne $f'(0) = -12e^{0} = -12$. En remplaçant ces valeurs, on obtient l'équation demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **La tangente en zéro a pour équation $y = 20 - 12t$.**

2. Transformées de Laplace d'un signal d'entrée et d'un signal de sortie

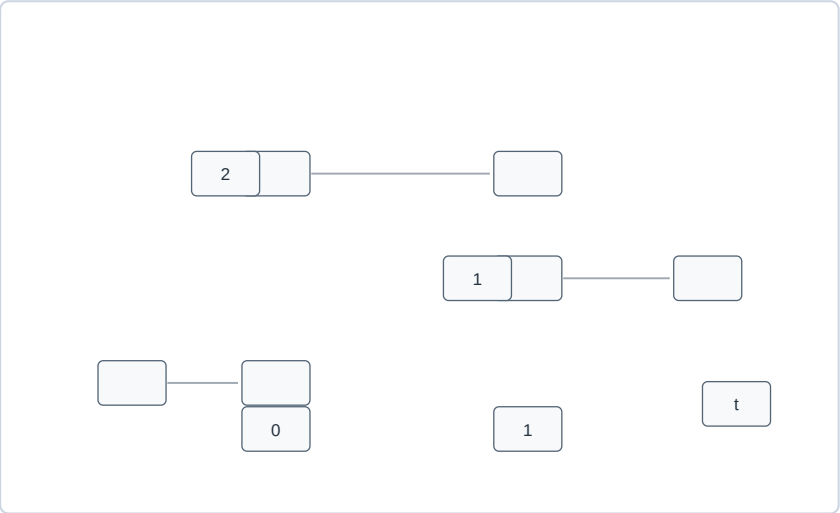
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). L'exercice porte sur les transformées de Laplace, l'expression de la sortie s(t) et le tracé des signaux d'entrée et de sortie.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Le signal est causal : il reste nul pour tout $t < 0$. À partir de $t = 0$, $2U(t) = 2$, puis à $t = 1$, le terme $U(t-1)$ vaut 1 et fait descendre le signal à 1. Les valeurs aux sauts sont bien $e(0) = 2$ et $e(1) = 1$, conformément à la définition de l'échelon donnée dans l'énoncé.

Signal d'entrée e(t)



Paliers horizontaux du signal causal. Les sauts en t=0 et t=1 ne sont pas reliés par des segments verticaux.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracer trois paliers : $e(t) = 0$ pour $t < 0$, $e(t) = 2$ pour $0 \leq t < 1$, puis $e(t) = 1$ pour $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).

La transformée de Laplace est linéaire. Le formulaire donne $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$ et $\mathcal{L}\{U(t-a)\} = e^{-ap}/p$. On applique ces deux formules aux termes de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$, en prenant $a = 1$ pour le second échelon. On additionne ensuite les transformées avec les mêmes coefficients que dans l'expression du signal d'entrée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La transformée de Laplace du signal d'entrée est $E(p) = \dfrac{2 - e^{-p}}{p}$.

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/(p(p + 1))]e⁻ᵖ.

Par définition de la fonction de transfert, $S(p) = H(p)E(p)$. On utilise $H(p) = 1/(p+1)$ et le résultat de la question précédente, $E(p) = (2 - e^{-p})/p$. En multipliant par $H(p)$, puis en séparant les deux termes du numérateur, on obtient l'expression demandée pour la transformée de Laplace du signal de sortie.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> On obtient bien $S(p) = \dfrac{2}{p(p+1)} - \dfrac{e^{-p}}{p(p+1)}$.

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Mettons les deux fractions du membre de droite au même dénominateur, $p(p+1)$. Le numérateur devient $(p+1) - p$, qui se simplifie en 1. Le membre de droite est donc égal à $1/[p(p+1)]$, ce qui vérifie l'égalité demandée pour les valeurs de p où les fractions sont définies.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'égalité est vérifiée : $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e⁻ᵖ et de [1/(p + 1)]e⁻ᵖ.

Les deux premières transformées inverses se lisent dans le formulaire : l'échelon a pour transformée $1/p$, et l'exponentielle causale $e^{-t}U(t)$ a pour transformée $1/(p+1)$. Pour les deux autres expressions, le facteur e^{-p} correspond à un retard d'une unité : on remplace alors t par $t-1$ et on multiplie par $U(t-1)$.

Expression	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre demandé : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$ et $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition de la question 2 donne $S(p) = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$. D'après les transformées inverses, le premier terme devient $2(1 - e^{-t})U(t)$. Les termes retardés sont nuls sur $[0; 1[$, car $U(t-1) = 0$ lorsque $t < 1$. Il ne reste donc que le premier terme sur l'intervalle demandé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0; 1[$, le signal de sortie est $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

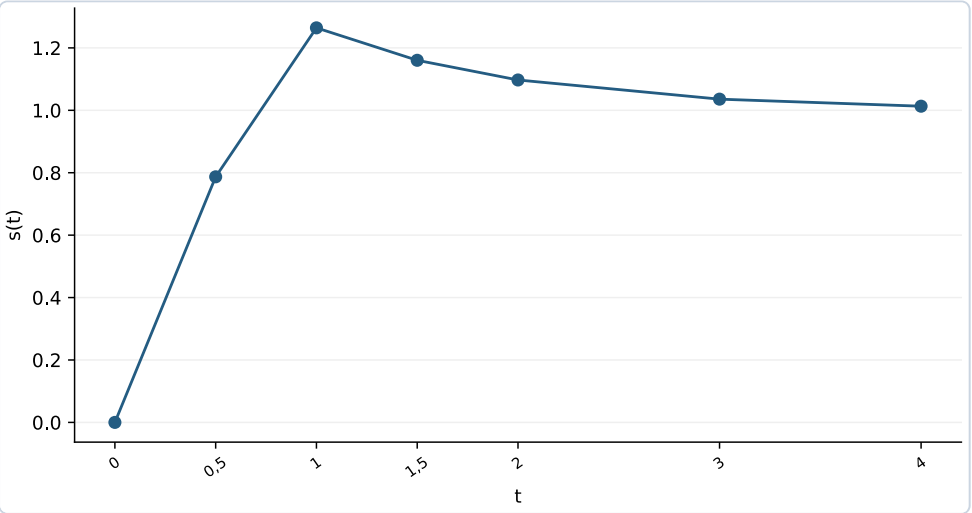
Question 5.a. Sachant que s(t) = (e - 2)e⁻ᵗ + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1) et donner sa valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.

La formule fournie pour $t \geq 1$ s'applique à $t = 1$. En la remplaçant, on trouve $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. Comme $e/e = 1$, cette expression se simplifie en $2 - 2/e$. Son évaluation donne environ $1,2642$, donc, arrondie au dixième comme demandé, la valeur est $1,3$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La valeur exacte est $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e}$, soit environ $1,3$ au dixième.

Question 5.b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0; 1[$, on trace la portion de courbe donnée par $s(t) = 2(1 - e^{-t})$, croissante depuis $(0; 0)$. À partir de $t = 1$, on utilise la formule admise $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$: la courbe décroît à partir de $s(1) = 2 - 2/e$ et tend vers le niveau 1. Les points du visuel servent de repères pour compléter le tracé sur le document-réponse.



Repères numériques pour le tracé de s(t). La courbe tend vers l'asymptote horizontale s=1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracer une courbe croissante de $(0;0)$ à $(1;2-2/e)$, puis décroissante et tendant vers l'asymptote horizontale $s=1$.

Question 5.c. Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, l'énoncé donne $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le facteur e^{-t} tend vers 0. Le terme $(e-2)e^{-t}$ tend donc également vers 0, tandis que le terme constant reste égal à 1. La limite de la fonction est ainsi déterminée par ce terme constant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La limite de $s(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est égale à 1.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot et un système électrique, mobilisant équations différentielles, fonctions, intégrales et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de $y' + ay = 0$ sont $y(t) = ke^{-at}$; une solution particulière de $y' + 0{,}8y = 4$ est la constante 5.
- Pour $f(t) = 15e^{-0{,}8t} + 5$, la limite en $+\infty$ vaut 5 et l'asymptote horizontale est $y = 5$.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$.
- La transformée de Laplace de $f(t - a)U(t - a)$ est $F(p)e^{-ap}$; le facteur exponentiel traduit un retard de a.

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour une équation différentielle avec second membre constant, trouver une solution particulière puis ajouter les solutions de l'équation homogène.
- Vérifier les unités : la vitesse est en m/s, le temps en secondes et l'intégrale de la vitesse donne une distance en mètres.
- Pour un signal décalé, appliquer le facteur e^{-p} et tenir compte du seuil $t = 1$ dans le tracé et l'expression temporelle.
- Sur le document-réponse, représenter les changements de niveau et les intervalles avec précision, puis vérifier la cohérence des courbes.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle de vitesse ?

Résoudre d'abord l'équation homogène $y' + 0{,}8y = 0$, dont les solutions sont $ke^{-0{,}8t}$. Ajouter ensuite la solution particulière constante 5, puis utiliser la condition $f(0) = 20$ pour déterminer la constante.

Q : Comment calculer la distance parcourue pendant la première seconde ?

Une primitive de $f(t) = 15e^{-0{,}8t} + 5$ est $F(t) = -18{,}75e^{-0{,}8t} + 5t$. La distance parcourue entre 0 et 1 se calcule par $F(1) - F(0)$, en mètres.

Q : Comment organiser le temps sur cette épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et comporte deux exercices de 10 points chacun. Avancez question par question et gardez du temps pour les calculs, les unités, les tracés sur le document-réponse et la vérification des résultats.

Q : Quels éléments de présentation sont importants pour la notation ?

Présentez les étapes de calcul et les justifications demandées, indiquez les unités pour les grandeurs physiques et donnez les valeurs exactes puis les arrondis requis. Pour le QCM de l'exercice 1, une seule réponse est à recopier.

Sujet officiel associé (PDF) : https://formationbtscg.fr/assets/annales/bts-cg/E2 - Mathématiques/2022/BTS CG - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Comptabilité et Gestion : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.