Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS COMPTABILITÉ ET GESTION • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Épreuve de mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour les spécialités indiquées, 3 pour Traitement des matériaux**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**

2. **Contrôle de conformité de tubes fluorescents et de rivets** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://formationbtscg.fr/assets/annales/bts-cg/E2 - Mathématiques/2022/BTS CG - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ sur un axe horizontal est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction exponentielle. Les questions portent sur une équation différentielle, l'étude de la fonction vitesse, la distance parcourue, un développement limité et la tangente à la courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

La formule fournie pour une équation de la forme $y' + ay = 0$ donne $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient est $a = 0,8$. On remplace donc a dans la formule, ce qui donne toutes les solutions sur l'intervalle demandé. La constante peut prendre n'importe quelle valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc sa dérivée est nulle : $g'(t) = 0$. En substituant g et sa dérivée dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette égalité étant vraie pour tout $t \in [0; +infty[$, la fonction g vérifie bien l'équation différentielle demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$: g est solution.

Question 1.c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation complète, comme vérifié en 1.b. Les solutions de l'équation homogène associée sont $ke^{-0,8t}$. En ajoutant à la solution particulière les solutions de l'équation homogène, on obtient toutes les solutions de l'équation complète sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$, pour $t \geq 0$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale trouvée précédemment est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. À l'instant initial, $e^0 = 1$, donc la condition $f(0) = 20$ donne $5 + k = 20$. Ainsi, $k = 20 - 5 = 15$. En reportant cette constante dans la solution générale, on obtient la fonction vitesse du chariot.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t), lorsque t tend vers +∞, est égale à 5.

La fonction est définie par $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque $t \to +infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, $15e^{-0,8t} \to 0$. Le second terme de l'expression reste égal à 5. La limite de la somme est donc 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La courbe d'une fonction qui admet une limite finie lorsque $t \to +infty$ possède une asymptote horizontale. Ici, la limite de $f(t)$ est 5. L'ordonnée de cette droite est donc égale à 5. On écrit son équation dans le repère de la courbe à l'aide de la variable verticale y.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. En utilisant l'expression fournie de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

On sait que $f'(t) = -12e^{-0,8t}$. L'exponentielle étant strictement positive, $f'(t) < 0$ pour tout $t \geq 0$. La fonction est donc strictement décroissante. Elle vaut 20 en $t = 0$ et tend vers 5 lorsque $t \to +infty$. Le tableau traduit ces variations sur l'intervalle demandé.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Un arrêt nécessiterait que la vitesse atteigne zéro. Or, pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Le terme exponentiel est toujours strictement positif, donc $f(t) > 5$. La vitesse se rapproche de $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ sans atteindre cette valeur en un temps fini. Dans ce modèle, le système ralentit le chariot, mais ne l'arrête pas.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et n'atteint jamais zéro.

Question 4.a. **La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.**

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$ en utilisant $(e^{-0,8t})' = -0,8e^{-0,8t}$. Ainsi, $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Le produit des coefficients vaut 15, donc $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est exactement celle de $f(t)$, ce qui vérifie que F est une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. **La distance parcourue entre les instants t_0 et t_1 est donnée par l'intégrale de f entre ces instants. Calculer la distance exacte parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance cherchée est $d = \int_0^1 f(t)\,dt$. Puisque F est une primitive de f, le théorème fondamental donne $d = F(1) - F(0)$. En remplaçant les bornes, on obtient $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. Cette valeur exacte vaut environ $15,3251$ mètres, soit $15,33$ mètres au centimètre près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = \frac{95}{4} - \frac{75}{4}e^{-4/5}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir, parmi les propositions, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte ; aucune justification n'est demandée.**

Le document donne le polynôme de Taylor à l'ordre 2 : $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Un développement limité à cet ordre s'écrit avec un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Il faut donc choisir la proposition qui conserve les trois termes du polynôme et présente ce reste. Il s'agit de la troisième proposition.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Choix 3 : $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. La condition initiale donne $f(0) = 20$, et l'expression fournie de la dérivée donne $f'(0) = -12e^0 = -12$. En remplaçant ces deux valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient la droite demandée, avec t comme variable horizontale.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$y = 20 - 12t$.

2. Contrôle de conformité de tubes fluorescents et de rivets

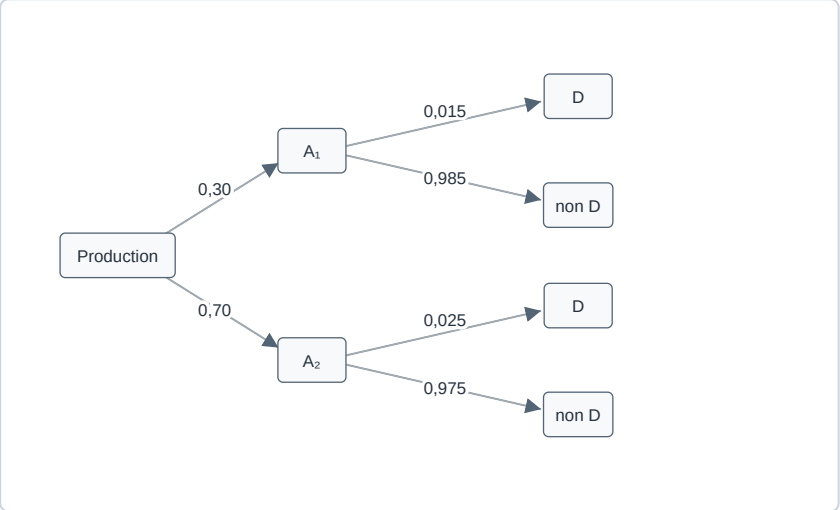
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers et contrôle la présence éventuelle de défauts ; leur durée de fonctionnement est aussi modélisée par une loi exponentielle. L'exercice traite également de l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation, avec les probabilités de production par atelier et les probabilités conditionnelles de défaut ou d'absence de défaut.

L'arbre commence par l'atelier d'origine, puis distingue les tubes avec ou sans défaut. Les probabilités des branches de défaut sont données dans l'énoncé ; celles d'absence de défaut sont leurs complémentaires.

Arbre pondéré des ateliers et des défauts

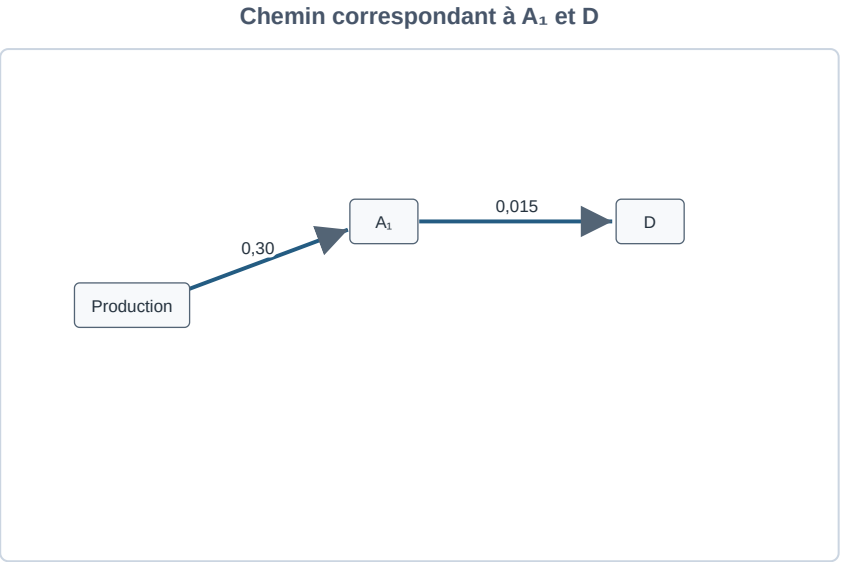


D : le tube présente un défaut ; non D : il n'en présente pas.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> A_1 : 0,30 ; A_2 : 0,70. Depuis A_1 : D 0,015, non D 0,985. Depuis A_2 : D 0,025, non D 0,975.

Question 2. Calculer la probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut, soit $P(A_1 \cap D)$.

La probabilité recherchée est celle du chemin qui passe par l'atelier 1 puis par la branche « défaut » :
$P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$.



La probabilité du chemin est le produit des probabilités inscrites sur ses branches.

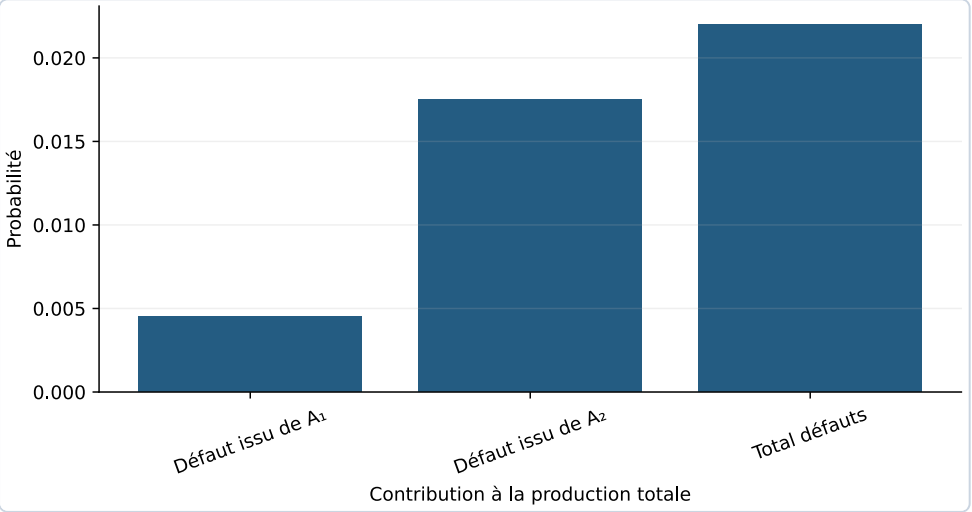
✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit 0,45 %.

Question 3. Calculer la probabilité qu'un tube choisi au hasard dans la production totale présente un défaut, en utilisant les données des deux ateliers.

Atelier	Calcul de la probabilité conjointe avec D	Valeur
A_1	0,30 × 0,015	0,0045
A_2	0,70 × 0,025	0,0175

Les deux ateliers couvrent toute la production. On additionne leurs contributions : P(D) = 0,0045 + 0,0175 = 0,022.



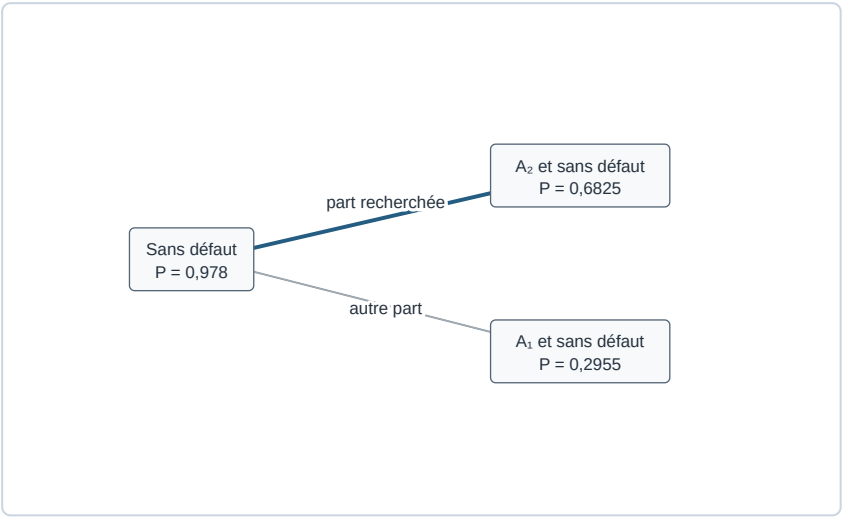
✓ RÉPONSE À RETENIR

P(D) = 0,022, soit 2,2 %.

Question 4. Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

On cherche la probabilité conditionnelle parmi les tubes sans défaut. La probabilité d'obtenir un tube de l'atelier 2 sans défaut vaut 0,70 × 0,975 = 0,6825, et P(non D) = 1 − 0,022 = 0,978.
Ainsi, $P(A_2 \mid \text{non D}) = 0{,}6825 / 0{,}978 \approx 0{,}698$.

Probabilité conditionnelle parmi les tubes sans défaut



La part recherchée est le rapport 0,6825 / 0,978.

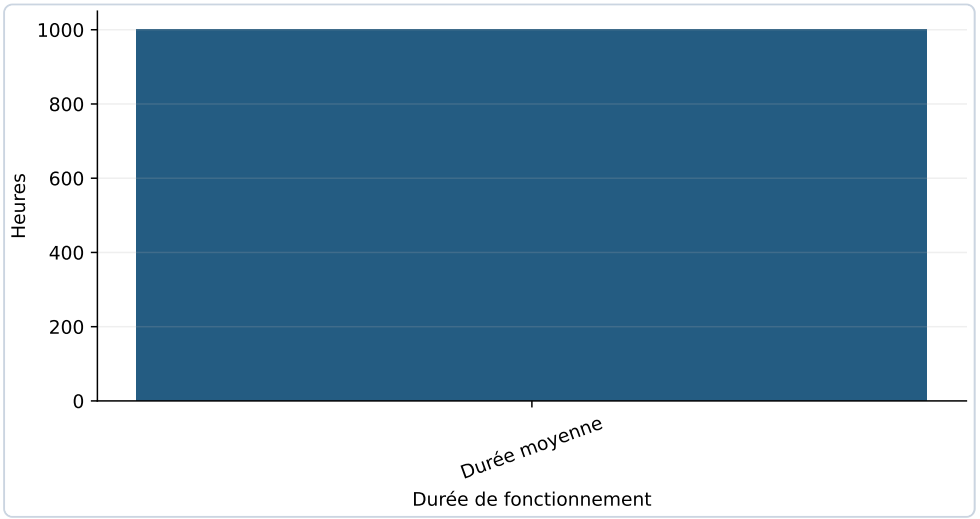
✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_2 \mid \text{non D}) \approx 0{,}698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. Déterminer l'espérance de la durée de bon fonctionnement T d'un tube fluorescent et interpréter le résultat dans le contexte.

Pour une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001, l'espérance est E(T) = 1/λ = 1/0,001 = 1 000 heures. Un tube fonctionne donc en moyenne 1 000 heures.

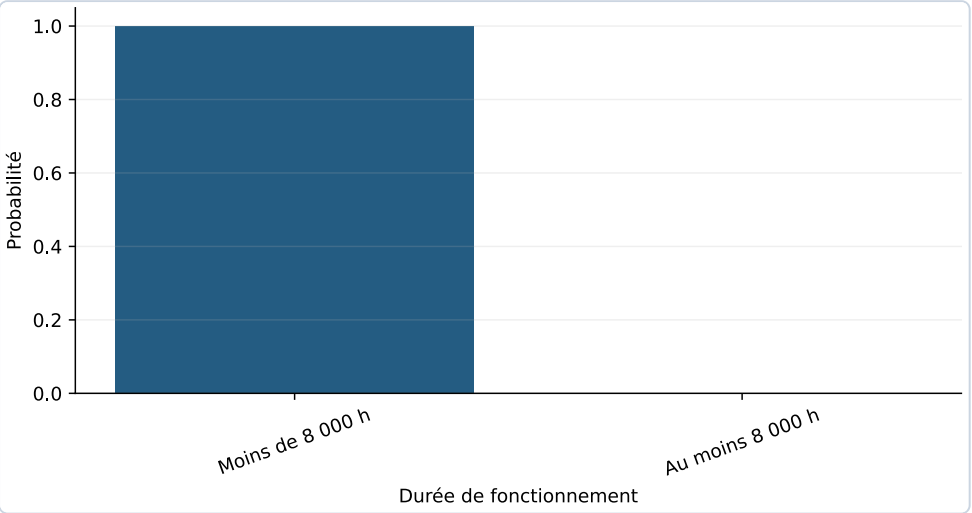


✓ **RÉPONSE À RETENIR**

E(T) = 1 000 heures.

Question 2. Calculer, avec un arrondi au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit inférieure à 8 000 heures.

La fonction de répartition donne $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0{,}9997$. Arrondie au centième, cette probabilité vaut 1,00.

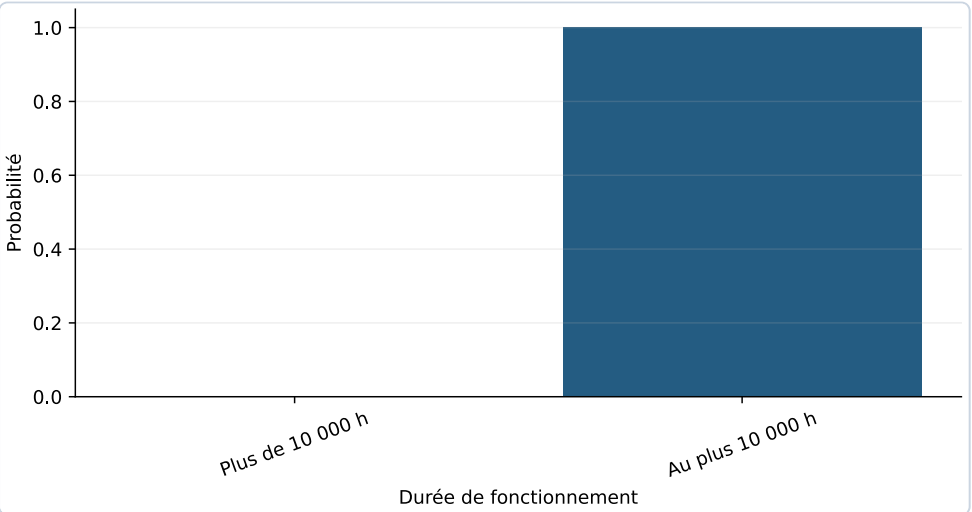


✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(T < 8\,000) \approx 1{,}00$.

Question 3. Calculer, avec un arrondi au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

1. Par complément de la fonction de répartition, $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}001 \times 10\,000}$.
2. Donc $P(T > 10\,000) = e^{-10} \approx 0{,}0000454$, soit 0,00 au centième.



✓ RÉPONSE À RETENIR

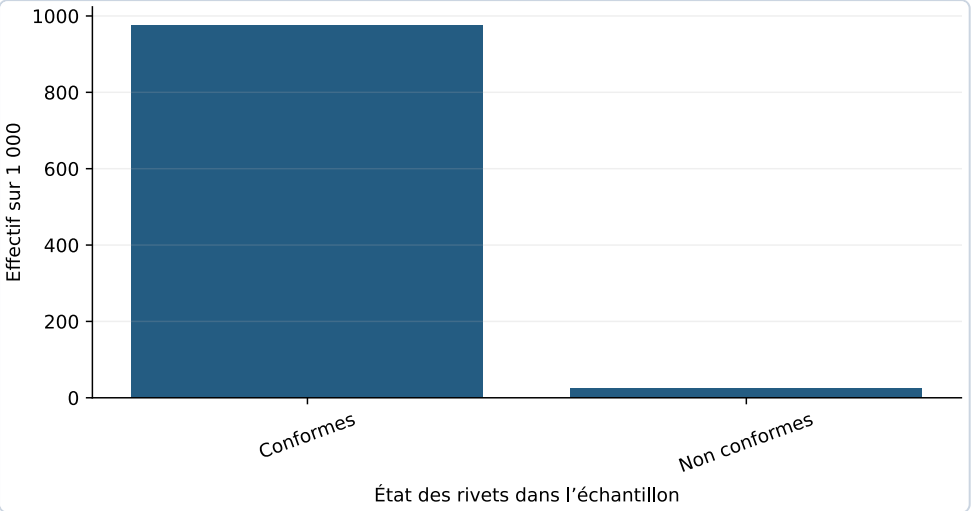
P(T > 10 000) ≈ 0,00 au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Dans un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

Rivets observés	Effectif	Fréquence
Conformes	975	975 / 1 000 = 0,975
Non conformes	25	25 / 1 000 = 0,025

L'estimation ponctuelle de la proportion de rivets conformes est la fréquence observée.



✓ RÉPONSE À RETENIR

Estimation ponctuelle : $\hat{p} = 0,975$, soit 97,5 %.

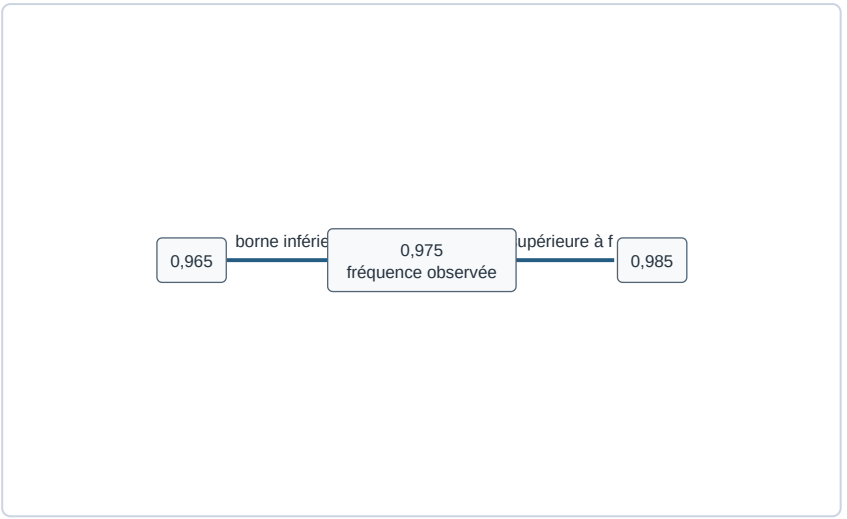
Question 2. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion p, au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

Avec f = 0,975 et n = 1 000, la formule fournie donne :

$[0,975 - 1,96\sqrt{(0,975 \times 0,025 / 1\,000)} ; 0,975 + 1,96\sqrt{(0,975 \times 0,025 / 1\,000)}] \approx [0,965323 ; 0,984677]$.

À 10^{-3} près, les bornes sont 0,965 et 0,985.

Intervalle de confiance à 95 %



Intervalle centré sur la fréquence observée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : [0,965 ; 0,985].

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2 pour les spécialités indiquées et 3 pour Traitement des matériaux. Elle étudie le freinage d'un chariot et le contrôle de production industrielle, en mobilisant équations différentielles, analyse de fonctions, probabilités, loi exponentielle et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$; une solution particulière permet de traiter une équation avec second membre.
- Si $f(t)$ tend vers L quand t tend vers $+\infty$, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- L'intervalle de confiance à 95 % donné pour une proportion est $f \pm 1{,}96\sqrt{f(1 - f)/n}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Dans l'arbre pondéré, indiquer les probabilités des ateliers puis les probabilités conditionnelles de défaut et d'absence de défaut.
- Pour une probabilité d'intersection, multiplier la probabilité de la première branche par la probabilité conditionnelle de la seconde.
- Pour $P(T > t)$, utiliser le complément de $P(T \leq t)$ et vérifier que le paramètre et le temps utilisent les unités prévues.
- Pour l'intervalle de confiance, utiliser la fréquence observée et l'effectif de l'échantillon, puis respecter l'arrondi demandé.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment obtenir la solution de l'équation différentielle du freinage ?

On résout d'abord l'équation homogène, puis on ajoute une solution particulière constante adaptée au second membre. On applique ensuite la condition $f(0) = 20$ pour déterminer la constante de la solution.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube fonctionne plus de 10 000 heures ?

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, on utilise $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Ici, λ vaut 0,001 et t vaut 10 000 heures ; on effectue le calcul puis on arrondit au centième.

Q : Comment organiser les deux exercices pendant les deux heures ?

Les trois parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment. Commencez par les questions directes, répartissez le temps entre les deux exercices et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, unités et arrondis.

Q : Le sujet impose-t-il le même coefficient à toutes les spécialités ?

Non. Le tableau attribue le coefficient 2 aux spécialités indiquées et le coefficient 3 à Traitement des matériaux. Il faut également respecter les arrondis explicitement demandés dans les calculs.

Sujet officiel associé (PDF) : https://formationbtscg.fr/assets/annales/bts-cg/E2 - Mathématiques/2022/BTS CG - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Comptabilité et Gestion : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.