Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation du départ d'un train à très haute vitesse (13 questions) — **Page 3**

2. Obsolescence programmée des smartphones (13 questions) — **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://formationbtscg.fr/assets/annales/bts-cg/E2 - Mathématiques/2018/BTS CG - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation du départ d'un train à très haute vitesse

L'exercice étudie le départ d'un wagon propulsé électromagnétiquement, dont la distance parcourue est modélisée en fonction du temps. Il mobilise une équation différentielle, l'étude de la vitesse du wagon et le calcul de l'aire d'une pièce destinée à une gare.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0.

On met l'équation sous la forme donnée dans le rappel : $y' + ay = 0$. Ici, $a = -0,2$, donc la formule fournit $y(t) = ke^{-(-0,2)t}$, où k est une constante réelle. Cette expression définit toutes les solutions sur l'intervalle demandé $[0, +\infty[$. La constante peut notamment être nulle, ce qui donne la solution nulle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie sur [0, 3] par g(t) = -15t - 75 est une solution de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

1. La dérivée de $g(t) = -15t - 75$ est $g'(t) = -15$.
2. On remplace ensuite y par g dans le membre de gauche : $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = 3t$. On retrouve exactement le membre de droite de l'équation, pour tout $t \in [0, 3]$. La vérification établit que la fonction proposée convient sur tout l'intervalle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> g est une solution de $y' - 0,2y = 3t$ sur $[0, 3]$.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

On connaît une solution particulière, $g(t) = -15t - 75$. À toute solution particulière, on ajoute les solutions de l'équation homogène associée, déterminées à la question 1 : $ke^{0,2t}$. Cette somme donne l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre. La constante k est arbitraire et réelle, et les expressions obtenues sont définies sur $[0, 3]$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t qui vérifie la condition initiale f(0) = 0.

1. La solution générale est $f(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$.
2. La condition initiale donne $f(0) = k - 75 = 0$, donc $k = 75$. En reportant cette valeur dans la solution générale, on obtient la fonction cherchée. Elle vérifie bien $f(0) = 0$ et satisfait l'équation différentielle, puisqu'elle appartient à l'ensemble des solutions trouvé précédemment.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir des expressions de f et de f' fournies par le logiciel de calcul formel, résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

Le calcul formel donne $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Ainsi, $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante et que $e^0 = 1$, cela équivaut à $0,2t \geq 0$, donc à $t \geq 0$. Tous les points de l'intervalle étudié vérifient cette condition, avec égalité en $t = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$.

Question 1° b). Déduire de la question précédente les variations de la fonction f sur l'intervalle [0, 3].

Intervalle	Signe de f'	Variation de f
$[0, 3]$	Positif ou nul	Croissante

Une fonction dont la dérivée est positive sur un intervalle y est croissante. Ici, la dérivée est nulle au départ et positive ensuite, donc f est croissante sur tout $[0, 3]$. Elle part de $f(0) = 0$ et atteint en $t = 3$ la valeur $75(e^{0,6} - 1) - 45$, soit environ $16,659$ km.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f croît de 0 à $75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$ sur $[0, 3]$.

Question 2°. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième.

La distance parcourue après une minute est la valeur de la fonction en $t = 1$. On remplace donc t par 1 dans l'expression obtenue : $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15 \approx 1,6052$. La distance est donnée en kilomètres. L'arrondi demandé au dixième consiste à conserver un seul chiffre après la virgule, en examinant le chiffre suivant.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Au bout d'une minute, le wagon a parcouru $1,6$ km.

Question 3° a). Sachant que la vitesse du wagon à l'instant t correspond à f'(t), déterminer sa vitesse à t = 2 minutes, en kilomètres par minute, et arrondir le résultat au dixième.

1. La vitesse instantanée est la dérivée $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$, exprimée en kilomètres par minute.
2. À deux minutes, on obtient $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1) \approx 7,377$.
3. L'arrondi au dixième donne $7,4$ km/min. Il s'agit bien d'une vitesse à l'instant $t = 2$, et non de la distance parcourue au cours des deux premières minutes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La vitesse à deux minutes est d'environ $7,4$ km/min.

Question 3° b). Dire si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse au regard de la vitesse visée de 400 km/h en moins de 2 minutes.

La vitesse visée correspond à $400/60 \approx 6,667$ km/min. Or, à deux minutes, la vitesse vaut environ $7,377$ km/min. De plus, $f'(0) = 0$ et $f''(t) = 3e^{0,2t} > 0$, donc la vitesse augmente continûment. Elle atteint donc la valeur cible avant deux minutes.

- Seuil visé : $6,667$ km/min.
- Vitesse à deux minutes : $7,377$ km/min.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : la vitesse de 400 km/h est atteinte avant deux minutes.

Question 4°. Parmi les trois propositions, recopier l'unique équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2. Aucune justification n'est demandée.

La tangente au point d'abscisse 2 a pour équation $y = f'(2)(t-2) + f(2)$. On a $f'(2) = 15(e^{0,4}-1)$ et $f(2) = 75(e^{0,4}-1) - 30$. En développant, le coefficient de t reste $15(e^{0,4}-1)$, et le terme constant devient $45e^{0,4} - 75$. Cette expression correspond à la troisième proposition.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 15(e^{0,4}-1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question 1°. Choisir, parmi les trois propositions, l'aire A1 du rectangle OPQR en unités d'aire. Aucune justification n'est demandée.

Sur le schéma, le rectangle $OPQR$ s'étend horizontalement de $x = 0$ à $x = 3$, donc sa largeur est 3 unités. Son bord supérieur est à l'ordonnée $y = 2,25$, et son bord inférieur est l'axe des abscisses : sa hauteur est donc 2,25 unités. L'aire d'un rectangle est le produit de sa largeur par sa hauteur. Parmi les choix proposés, la troisième valeur convient.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_1 = 6,75$ u. a.

Question 2°. Calculer l'aire A2, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe de g(x) = 27x/(2x² + 18), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3, en utilisant la primitive fournie.

1. Sur $[0,3]$, $g(x) = \frac{27x}{2x^2+18}$ est positive ou nulle. L'aire demandée est donc $\int_0^3 g(x)\,dx$.
2. La primitive fournie est $\frac{27}{4}\ln(x^2+9)$. Ainsi, $A_2 = \frac{27}{4}[\ln(18) - \ln(9)] = \frac{27}{4}\ln(2) \approx 4,679$ unités d'aire. La constante de la primitive s'élimine dans la différence des valeurs aux bornes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire hachurée A, en unités d'aire, et arrondir le résultat au millième.

Partie	Aire
Rectangle entier, de $x = -3$ à $x = 3$	$2A_1 = 13,5$
Parties sous les deux courbes, par symétrie	$2A_2$

L'aire hachurée est l'aire du rectangle entier diminuée des deux aires sous la courbe, une de chaque côté de l'axe des ordonnées. La symétrie donnée dans l'énoncé permet de doubler l'aire calculée à la question précédente. Ainsi, $A = 13,5 - 2 \times \frac{27}{4} \ln 2$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A \approx 4,143$ u. a.

2. Obsolescence programmée des smartphones

L'exercice étudie l'obsolescence technique et logicielle de smartphones, puis la proportion de téléphones non réparables parmi des appareils retournés au service après-vente. Il évalue les probabilités conditionnelles, la loi binomiale et un test d'hypothèse bilatéral appliqué à une enquête d'opinion.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des données sur les 200 smartphones, recopier et compléter le tableau d'effectifs croisant les appareils touchés ou non par l'obsolescence technique et ceux touchés ou non par l'obsolescence logicielle.

Les effectifs touchés par les obsolescences technique et logicielle sont respectivement 6 et 16. Parmi les 16 touchés par l'obsolescence logicielle, 2 sont aussi touchés techniquement. On complète les autres cases à partir des totaux.

Smartphones	Touchés par l'obsolescence logicielle	Non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
Touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
Non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Cases intérieures : 2, 4, 14 et 180.

Question 2°. Pour les événements T : « le smartphone prélevé est touché par l'obsolescence technique » et L : « le smartphone prélevé est touché par l'obsolescence logicielle », donner P(T), P(L) et la probabilité conditionnelle P_L(T).

Les proportions de smartphones touchés par les obsolescences technique et logicielle donnent directement les probabilités de T et de L. L'énoncé donne aussi la proportion touchée techniquement parmi les smartphones touchés par l'obsolescence logicielle, soit la probabilité conditionnelle de T sachant L.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0{,}03$; $P(L) = 0{,}08$; $P_L(T) = 0{,}125$.

Question 3° a). À l'aide des questions précédentes, calculer la probabilité $P(T \cap L)$.

La probabilité de l'intersection se calcule avec la probabilité conditionnelle : $P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T) = 0{,}08 \times 0{,}125$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T \cap L) = 0{,}01$.

Question 3° b). À l'aide des questions précédentes, calculer la probabilité $P(T \cup L)$.

La formule de l'union consiste à additionner les probabilités de T et de L, puis à retrancher leur intersection pour ne pas la compter deux fois : $P(T \cup L) = 0{,}03 + 0{,}08 - 0{,}01$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T \cup L) = 0{,}10$.

Question 3° c). À l'aide des questions précédentes, calculer la probabilité conditionnelle P_T(L).

La probabilité conditionnelle de L sachant T est le quotient de la probabilité de l'intersection par celle de T : $P_T(L) = P(T \cap L) / P(T) = 0{,}01 / 0{,}03$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L) = 1/3 \approx 0{,}333$.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables parmi 50 téléphones prélevés, suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.

Chaque tirage est une épreuve de Bernoulli : le smartphone est non réparable avec la probabilité 0,045. Les tirages sont assimilés à des tirages avec remise, donc indépendants et de probabilité constante. X compte les smartphones non réparables parmi les 50 tirés : X suit une loi binomiale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> X suit la loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,045.

Question 2°. Calculer la probabilité que les 50 smartphones du lot soient tous réparables.

Tous les smartphones sont réparables lorsque X = 0. La probabilité qu'un smartphone soit réparable est 1 − 0,045 = 0,955. Par indépendance, la probabilité recherchée vaut $0{,}955^{50}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 0) \approx 0{,}100$.

Question 3° a). Exécuter à la main l'algorithme, puis recopier et compléter le tableau avec les valeurs de P(X = i) et de S pour i = 0, 1, 2 et 3.

Pour chaque valeur de i, on calcule P(X = i), puis on l'ajoute à S. Les probabilités et les sommes sont arrondies au millième.

i	0	1	2	3
P(X = i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(X = i) : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. S : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat.

À la fin de l'algorithme, S additionne les probabilités P(X = i) pour i allant de 0 à 3. Cette somme représente la probabilité qu'un lot contienne au plus 3 smartphones non réparables.

✓ RÉPONSE À RETENIR

S ≈ 0,813 : environ 81,3 % des lots comptent au plus 3 smartphones non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut E(X) = np. Ici, E(X) = 50 × 0,045 = 2,25. En moyenne, un lot de 50 smartphones contient donc 2,25 appareils non réparables.

✓ RÉPONSE À RETENIR

E(X) = 2,25 smartphones non réparables par lot en moyenne.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Parmi 0,05, 0,06 et 0,07, choisir la valeur approchée de h, arrondie au centième, telle que, sous H0, P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95. Aucune justification n'est demandée.

La valeur correspondant à 95 % de probabilité centrée est h ≈ 1,96 × 0,037 = 0,07252. Arrondie au centième, elle correspond à la proposition 0,07.

✓ RÉPONSE À RETENIR

h ≈ 0,07.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 % pour tester H0 : p = 0,55 contre H1 : p ≠ 0,55.

Au seuil de 5 %, on conserve H_0 si la fréquence observée appartient à l'intervalle central sous H_0, centré sur 0,55 et de demi-largeur h ≈ 0,07. Sinon, on rejette H_0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Conserver H_0 si 0,48 ≤ F ≤ 0,62 ; la rejeter sinon.

Question 3°. Sur l'échantillon aléatoire de 180 personnes interrogées, 76 pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Déterminer la conclusion du test.

La fréquence observée est 76 / 180 ≈ 0,422. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle de conservation de H_0 : elle se situe donc dans la région de rejet.

✓ RÉPONSE À RETENIR

On rejette H_0 au seuil de 5 % : la proportion observée diffère significativement de 55 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2018, porte le code MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient varie selon la spécialité, de 1 à 3. Elle étudie le départ d'un train à très haute vitesse et l'obsolescence programmée des smartphones. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, fonctions, calcul intégral, probabilités conditionnelles, loi binomiale et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' - 0,2y = 0, les solutions sont de la forme y(t) = k e^(0,2t).
- La vitesse instantanée est la dérivée de la distance : si f est en kilomètres et t en minutes, f'(t) s'exprime en km/min.
- Pour une loi binomiale X de paramètres n et p, E(X) = np et P(X = i) = C(n,i)p^i(1-p)^(n-i).
- Pour deux événements T et L, P(T ∩ L) = P(L)P_L(T) et P(T ∪ L) = P(T) + P(L) - P(T ∩ L).

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : convertir les vitesses en km/h ou en km/min avant de les comparer à l'objectif.
- Dans une probabilité conditionnelle, identifier clairement l'événement qui constitue la condition.
- Pour la loi binomiale, vérifier le nombre fixe d'essais, l'indépendance et la probabilité constante de succès.
- Pour le test bilatéral, comparer la fréquence observée aux bornes de l'intervalle de décision et conclure dans le contexte.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment passer de la vitesse en kilomètres par minute à la vitesse en kilomètres par heure ?

Une minute représente un soixantième d'heure. Pour convertir une vitesse exprimée en kilomètres par minute en kilomètres par heure, on la multiplie par 60, puis on compare le résultat à la vitesse cible.

Q : Comment choisir les paramètres de la loi binomiale dans le problème des smartphones ?

Le nombre d'essais n correspond à la taille du lot, ici 50. La probabilité p correspond à la probabilité qu'un téléphone soit non réparable, ici 0,045, et X compte le nombre de téléphones non réparables.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Le sujet comporte deux exercices de dix points, chacun réparti en trois parties indépendantes. Parcourez les questions au début, répartissez le temps entre les deux exercices et gardez quelques minutes pour vérifier calculs, unités et arrondis.

Q : Qu'attend le jury pour une conclusion de test d'hypothèse ?

La conclusion doit s'appuyer sur la règle de décision établie au seuil de 5 %. Il faut préciser si l'on rejette ou ne rejette pas l'hypothèse nulle, puis relier cette décision à la proportion étudiée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://formationbtscg.fr/assets/annales/bts-cg/E2 - Mathématiques/2018/BTS CG - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Comptabilité et Gestion : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.